

*Sulla costruzione
di un cannocchiale acromatico senza lenti
eseguito con un sol mezzo refringente*

Memoria
del Signor Professore Gio. Battista Amici

Ricevuta adì 14. Maggio 1821.

«Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze residente in Modena»
Tomo XIX. Parte contenente le Memorie di Matematica
Modena, presso la Società Tipografica, MDCCCXXI
(pp. 121-137)

È noto ai Fisici che guardando un oggetto attraverso un prisma si scorgono le sue dimensioni nel senso del piano di rifrazione diversamente alterate secondo che le faccie del prisma, ruotando intorno l'asse suo, variamente s'inclinano davanti l'occhio.

Col principio che il seno dell'angolo d'incidenza sta al seno dell'angolo di rifrazione in un rapporto costante è facile il dimostrare che indipendentemente anche dalla dispersione de' colori, l'oggetto guardato attraverso un prisma deve vedersi dilatato, e tanto maggiormente quanto è più grande la deviazione de' raggi prodotta dalla faccia posteriore del prisma stesso in confronto dell'altra prodotta dalla sua faccia anteriore. E che al contrario l'oggetto deve mostrarsi tanto più contratto o ristretto, sempre però per un sol verso, quanto è maggiore la deviazione nella prima faccia riguardo a quella della seconda. Quindi nel solo caso dell'uguaglianza d'inclinazione de' raggi nell'entrata, ed uscita dal prisma ossia nel caso della minima rifrazione dell'immagine, l'oggetto di piccola estensione non deve sensibilmente cambiare nelle sue forme.

Partendo io da questo fatto mi è riuscito di determinare una semplicissima combinazione di prismi tutti dello stesso vetro, dalla quale nel mentre ottiensi l'ingrandimento d'un oggetto come da un cannocchiale, si escludono pure i colori dell'iride, che toglierebbero la distinzione dell'immagine. Di questa combinazione di prismi, e di varie altre migliori suggeritemi da una nuova proprietà della luce rifratta, che in appresso esporrò, il presente mio scritto è destinato a dar breve conto.

Ma per comprendere meglio la costruzione del nuovo e più semplice istrumento, e per fissare le idee, noi supporremo che attraverso di un prisma avente l'asse disposto verticalmente si guardi un oggetto di forma quadrata situato con due suoi lati paralleli all'asse predetto. Egli è manifesto che se il tagliente del prisma venga rivolto verso l'oggetto quadrato, nel qual caso la deviazione de' raggi si fa maggiore nell'uscita del prisma che nell'entrata, l'oggetto stesso apparirà dilatato nella direzione orizzontale; ed il quadrato acquisterà la forma di un rettangolo. Frattanto se si prende un secondo prisma della stessa sostanza del precedente, e di un egual angolo refringente, disponendolo dietro il primo con il suo asse parallelo ai lati orizzontali del quadrato, e girandolo intorno all'asse medesimo, onde la quantità di sua rifrazione riesca eguale a quella del primo prisma, è parimente manifesto che col dilatare esso l'oggetto nella sola direzione verticale, trasformerà il rettangolo di nuovo in un quadrato, il quale però apparirà all'occhio, che guarda attraverso il sistema prismatico, sotto un angolo maggiore di quello sotteso dall'oggetto stesso veduto direttamente.

Con tutto che però la disposizione indicata de' prismi sia atta a produrre l'ingrandimento dell'oggetto, pure niun vantaggio ne deriverebbe se non si trovasse mezzo di togliere i colori, che in virtù delle rifrazioni de' due prismi sono dispersi nella direzione della diagonale del quadrato, e

rendono così le parti di lui totalmente indistinte. Or niente è più agevole di tale correzione. Impeccabile se si considera che uno spettro colorato di una data grandezza può essere prodotto in due maniere diverse cioè, o col ruotare intorno l'asse un prisma di piccolo angolo per accrescere la di lui rifrazione; oppure col fare un prisma della stessa sostanza con un angolo refringente maggiore, sarà facile (lasciando a parte la prima maniera che varierebbe le forme dell'immagine) di determinare la grandezza dell'angolo da darsi a un terzo prisma, affinché colla sua minima rifrazione produca uno spettro colorato della stessa lunghezza di quello che si ottiene dalla combinazione de' due prismi sopra indicati. Se questo terzo prisma adunque si pone dietro i due primi in modo che la di lui rifrazione si effettui nel senso della diagonale del quadrato, ed in direzione opposta alla rifrazione de' medesimi, esso correggerà la dispersione de' colori senza deformare l'oggetto ingrandito; di modo che il sistema di questi tre soli prismi costituirà un cannocchiale acromatico eseguito con un sol mezzo refringente.

La grandezza degli angoli de' primi due prismi è arbitraria, ma riesce più vantaggioso il prendere assai piccoli questi angoli, poiché si ottiene dai medesimi con minori colori un maggior ingrandimento dell'oggetto; e non fa d'uopo d'accrescere di troppo l'angolo del terzo prisma che deve correggere i colori stessi. Se l'angolo poi del terzo prisma non fosse giustamente regolato per produrre nella sua minima rifrazione uno spettro colorato, come quello risultante dalla combinazione de' due primi prismi, l'oggetto ingrandito e reso acromatico riescirebbe deforme, ed invece di un quadrato si avrebbe l'immagine di un rombo. Questa deformità però potrebbe in pratica togliersi col variare l'inclinazione rispettiva dei due primi prismi, dal che per altro ne risulterebbe un diverso ingrandimento.

In un sistema di prismi di Crown-glass aventi i primi un angolo di $6^{\circ} 15'$ ed il terzo un angolo di $28^{\circ} 12'$ ho ottenuto l'amplificazione di due volte circa.

L'unione de' tre prismi fatta nel modo che ho esposto non è in vero la più favorevole a formare un cannocchiale acromatico, essa non è nemmeno la prima idea che mi si sia presentata intorno questo soggetto; ma contuttociò mi è sembrato conveniente di parlarne avanti delle altre combinazioni che ho immaginate, a motivo della sua maggiore semplicità, come pure per essere essa appoggiata a principj abbastanza noti sulla rifrazione, e dispersione de' colori.

La costruzione migliore di un cannocchiale prismatico esige per lo meno quattro prismi; ma perché si concepisca il modo con cui dalla loro disposizione si forma l'acromatismo, è necessario che io dia contezza di una proprietà della luce rifratta, la quale per quanto so, non è stata da alcuno presa in considerazione.

Si è ritenuto sin qui dai Fisici che la dispersione dei colori sia costante in uno stesso mezzo refringente, ossia che a pari rifrazioni attraverso la medesima sostanza corrispondano pari dispersioni. Questa è una delle leggi fondamentali su cui si appoggiano le teorie de' più celebri Matematici sui cannocchiali acromatici, e dalla quale si è giudicato impossibile di torcere la luce per rifrazione senza decomporla, usando in qualunque modo di una sola sostanza trasparente. Io però ho trovato che la dispersione prodotta da più di una rifrazione non è altrimenti costante, ma varia secondo le varie inclinazioni del raggio incidente sulla faccia di un prisma.

Un raggio di luce può cadere ed uscire da un prisma facendo angoli eguali sulle faccie del medesimo. In tal situazione si sa che la rifrazione totale è un *minimum*, e che tutt'altro raggio incidente inclinato rispetto al precedente più verso il tagliente del prisma o più verso la base, soffre una maggior deviazione. Ora una serie di esperimenti che ho istituiti mi dimostra la non conosciuta proprietà, che se il raggio incidente piega verso il tagliente (*a*) di un prisma, la dispersione è maggiore di quella che si ottiene girando lo stesso prisma per avere la medesima rifrazione totale, ma col raggio incidente piegato verso la base.

Ciò poi che sembra più singolare si è, che il raggio uscito da un primo prisma acquista tal modificazione da cambiare in un modo affatto opposto la proprietà indicata. Poiché succede che ricevendosi in un secondo prisma il raggio uscito dal primo, la dispersione de' colori è più grande quando il

(*a*) L'inclinazione verso il tagliente o verso la base, quando non si avverta in contrario, è sempre riferita al raggio che soffrirebbe la minima deviazione attraversando un prisma.

raggio incidente sia piegato verso la base del secondo prisma, e riesce men grande in parità di rifrazione se il raggio incidente pieghi verso il tagliente.

Questa nuova legge intorno la diversa rifrangibilità de' raggi colorati può con altri termini essere annunziata così.

In eguali deviazioni dello spettro prodotte da disuguali deviazioni de' raggi sulle due faccie d'un prisma, gli spazj colorati sono maggiori quando è più grande la deviazione sulla faccia posteriore in confronto dell'anteriore, e ciò soltanto nel caso in cui il raggio incidente non abbia sofferto prima alcuna rifrazione. Che se il raggio incidente è stato prima rifratto da un prisma, allora in eguali deviazioni dello spettro prodotte da disuguali deviazioni sulle due faccie dell'ultimo prisma gli spazj colorati sono minori, quando è più grande la deviazione sulla faccia posteriore in confronto dell'anteriore.

Tutto ciò è il risultato de' seguenti esperimenti che possono essere facilmente ripetuti da chiunque possenga una serie di ben lavorati prismi.

ESPERIMENTO I. Un prisma di Crown glass d'Inghilterra di $20^{\circ} 6'$ posto verso l'oggetto col raggio incidente egualmente inclinato dell'emergente sui piani di rifrazione, viene corretto dai colori con un prisma di vetro da specchj di Francia di $6^{\circ} 15'$ posto verso l'occhio, quando il raggio incidente in esso si trova inclinato verso la di lui base: la rifrazione attraverso i due prismi è zero, ossia i due prismi danno rifrazioni uguali. L'oggetto reso acromatico si vede contratto.

II. Gli stessi prismi. Raggio incidente nel primo inclinato verso la sua base è corretto cadendo nel secondo più inclinato verso la base di questo.

La rifrazione è maggiore nel primo prisma. L'oggetto è contratto.

III. Gli stessi prismi cambiati di posto, cioè messo verso l'oggetto quello che stava prima presso l'occhio. Raggio incidente inclinato verso il tagliente del primo prisma è corretto cadendo nel secondo prisma con incidenza eguale all'emergenza.

La rifrazione totale è nulla. L'oggetto si vede dilatato.

IV. Gli stessi prismi. Raggio incidente ancor più inclinato verso il tagliente del primo è corretto incontrando il secondo con maggior inclinazione verso il suo tagliente.

La rifrazione è maggiore nel secondo prisma. L'oggetto è dilatato.

V. Un prisma di vetro bianco di Venezia di $28^{\circ} 12'$ collocato verso l'oggetto con un prisma di Crown glass d'Inghilterra di $20^{\circ} 6'$ posto verso l'occhio tolgono i colori, quando l'incidenza eguaglia l'emergenza nel prisma di vetro di Venezia, e che il raggio incidente nel secondo prisma pieghi verso la sua base. La rifrazione rimane allora maggiore nel primo prisma, e l'oggetto è contratto.

I colori possono anche distruggersi lasciando immobile il primo prisma, e ruotando il secondo in modo che il raggio in esso incidente pieghi verso il tagliente. In questo caso la rifrazione è maggiore nell'ultimo prisma, e l'oggetto si vede dilatato.

Invertendo i prismi si ha correzione, tanto cadendo il raggio nel primo prisma inclinato verso la base, come anche cadendo inclinato verso il tagliente, purché nel secondo prisma l'incidenza eguagli l'emergenza. Nel primo caso la rifrazione è maggiore nel prisma verso l'oggetto che si vede contratto. Nel secondo caso la rifrazione è maggiore nel prisma verso l'occhio per cui l'oggetto rimane dilatato.

VI. Prisma di vetro di Venezia di $28^{\circ} 12'$ con prisma di vetro da specchj di Francia di $10^{\circ} 42'$; il primo essendo verso l'oggetto con incidenza eguale all'emergenza, viene corretto dal secondo cadendo in esso il raggio inclinato verso la base. L'oggetto rimane contratto, e la rifrazione più grande è nel primo prisma.

VII. Un prisma di Crown glass d'Inghilterra di $20^{\circ} 6'$ con uno pure di Crown glass d'Inghilterra di $10^{\circ} 42'$; il primo essendo dalla parte dell'oggetto col raggio incidente egualmente inclinato dell'emergente si correggono in due maniere cioè, o col rendere il raggio incidente nel secondo prisma inclinato verso la base, oppure col far che sia piegato verso il tagliente. Nel primo caso la rifrazione è maggiore nel prisma esterno, e l'oggetto è ristretto. Nel secondo caso la rifrazione è più grande nel prisma interno, e l'oggetto si vede dilatato.

VIII. Un prisma di Flintglass di $10^{\circ} 18'$ con un prisma di Crown glass di Francia di $10^{\circ} 42'$ si correggono quando il primo, trovandosi dalla parte dell'oggetto, con incidenza eguale all'emergenza si riceve sul secondo prisma il raggio inclinato verso la sua base, oppure inclinato verso il suo vertice. In queste due correzioni diverse le rifrazioni sono sempre maggiori nel secondo prisma di vetro; ma di queste rifrazioni è più grande quella che si ottiene quando il raggio incidente piega verso il tagliante.

Nella prima correzione l'oggetto è contratto; nella seconda è dilatato.

IX. Un prisma di Flintglass di $44^{\circ} 16'$ si corregge con altro di Flintglass di $24^{\circ} 12'$ dando il primo la sua rifrazione minima, e piegando il raggio incidente verso la base del secondo prisma prossimo all'occhio. La rifrazione è maggiore nel primo prisma, e l'oggetto rimane contratto.

X. In due prismi eguali della stessa sostanza qualunque, il raggio incidente inclinato verso la base del primo si corregge incontrando il secondo con incidenza pure verso la base di questo. La rifrazione è maggiore nel primo prisma. L'oggetto è contratto.

Restando il primo prisma immobile come sopra, se si inclini il secondo in modo di produrre la stessa rifrazione, ma col raggio incidente in esso inclinato verso il di lui tagliante, la dispersione di questo secondo prisma diventa minore.

XI. Con gli stessi prismi uguali e di eguale sostanza, il raggio incidente inclinato verso il tagliante del primo prisma si corregge nel secondo, quando il raggio in esso incidente inclina pure verso il di lui tagliante; l'oggetto è dilatato, e la rifrazione è maggiore nel secondo prisma.

Restando immobile il primo prisma e piegando il secondo affinché il raggio in esso incidente inclini verso la sua base, a pari rifrazioni nelle due diverse posizioni la di lui dispersione è maggiore.

XII. Prismi come sopra. Raggio incidente inclinato come l'emergente nel primo prisma non si corregge col secondo volendosi rifrazione da qualunque parte.

XIII. In due prismi eguali sempre della stessa sostanza, ad incidenze eguali dalla parte de' taglianti de' medesimi il raggio sorte colorato e la dispersione è maggiore nel prisma verso l'oggetto il quale è dilatato.

XIV. In due prismi eguali di egual vetro ad incidenze uguali dalla parte delle basi de' medesimi, il raggio sorte colorato, e la dispersione è maggiore nel secondo prisma cioè quello verso l'occhio.

L'oggetto è contratto.

Da questi esperimenti or ben si può comprendere come con una sola coppia di prismi di sostanze diverse, oppure della stessa sostanza si ottenga e dilatazione dell'immagine di un oggetto, e acromatismo insieme.

Se si uniscono ad angolo due prismi eguali e dello stesso vetro, in modo che il tagliante dell'uno corrisponda alla base dell'altro come si vede nella fig. 1., questi ruotati convenientemente intorno all'asse comune A mostreranno, all'osservatore che guarda in M, l'oggetto O portato in P, ed ivi dilatato e reso acromatico in conformità dell'esperimento XI.

Prendendo ora un'altra coppia di prismi uguali ai precedenti ed egualmente uniti, se si disporranno dietro i primi in croce, cioè in maniera da produrre la dilatazione dell'immagine nel senso normale alla prima, si avrà dall'aggregato di questi quattro prismi l'amplificazione senza colori dell'oggetto osservato.

Da qui si ravvisa che la presente costruzione è assai più vantaggiosa di quella che dissi effettuarsi con tre soli prismi. Imperocché nella prima maniera la dilatazione, ossia ingrandimento dell'immagine per un sol verso, si ottiene da un unico prisma nel quale la rifrazione si fa maggiore nella faccia posteriore; ma nella seconda maniera l'ingrandimento lineare risulta dalla somma delle dilatazioni di due prismi, in entrambi i quali la deviazione de' raggi si fa maggiore nella faccia posteriore.

La variazione poi nell'ingrandimento in questo genere di cannocchiali dipende dalla variazione dell'angolo RAS il quale quanto è più piccolo tanto minore ingrandimento produce.

Fino dal 1815. io ho fatto costruire cannocchiali di questa specie con prismi di grandi e di piccoli angoli, da' quali tutti ho ottenuto un ottimo effetto. Uno di questi lungo meno di un pollice e largo

mezzo pollice eseguito con prismetti di vetro di Francia di 45° ha tanta distinzione, o precisione de' contorni dell'immagine, che supera in forza i più perfetti cannocchiali da Teatro acromatici.

Anche con sei prismi si può formare l'istrumento guadagnando in potere amplificante sopra il cannocchiale a quattro prismi. L'artificio per ingrandire anche in questo è analogo al precedente. Non occorrono che due sistemi di prismi uguali che dilatino, e rendano acromatici gli oggetti. La disposizione di uno di questi due sistemi è rappresentata nella fig. 2. I due primi prismi GHF, EDF assieme uniti sotto un angolo conveniente EFG debbono ruotarsi intorno l'asse F finché l'oggetto O attraverso i due prismi si veda in Q ove prevalga la rifrazione, e la dispersione del prisma EDF. Quindi col terzo prisma ABC con incidenza verso il tagliante si corregga la dispersione medesima, e per mezzo ai tre prismi l'immagine Q già dilatata tornerà verso O ancor più dilatata, perché le deviazioni de' raggi nei tre prismi sono tutte maggiori nelle loro faccie posteriori.

Otto prismi uguali ingrandiscono ancora di più. Il loro ingrandimento lineare corrisponde al quadrato dell'ingrandimento lineare di un cannocchiale a quattro prismi. Inoltre hanno la particolarità di mostrare l'oggetto amplificato nel suo posto reale. Nella fig. 3. si vede uno dei due sistemi uguali composto di quattro prismi che dilata l'oggetto O senza spostarlo. I due primi prismi, A, B sono assieme combinati come quelli della fig. 1. e nella stessa guisa sono riuniti gli altri due C, D, ma colla differenza che questi ultimi sono rivolti in senso opposto, per modo che se dall'una coppia si ottiene trasporto dell'oggetto da sinistra a destra, dall'altra coppia il cambiamento si fa da destra a sinistra.

Ma coll'accrescere di troppo il numero de' prismi si perde in chiarezza ed in campo ciò, che si acquista in forza amplificante, onde non è da confidarsi che con questo artificio si possa giugnere ad un considerabile ingrandimento. A tal uopo sarebbe necessario di formare delle lenti acromatiche la costruzione delle quali però si mostra possibile, poiché con una sola sostanza refringente io ho potuto formare de' prismi perfettamente acromatici. Ma siccome per ognuno di questi occorrono quattro prismi semplici, così in corrispondenza per una lente obbiettiva acromatica si esigerebbero quattro lenti del medesimo vetro.

La composizione di questi nuovi prismi acromatici non riescirà malagevole a comprendersi dopo tuttociò che fin ora è stato esposto; anzi la sola figura 4. basterà a darne una chiara idea. In essa si vedono due prismi uguali A, B, uniti assieme come si avvertì nella fig. 1. i quali spostando l'immagine dell'oggetto O la portano in P dilatata per l'esperimento XI. Gli altri due prismi C, D uniti fra loro nella stessa guisa de' precedenti, ma rovesciati rapporto alla posizione dell'occhio, deviano l'immagine P ancora di più dipingendola contratta nel posto Q, e ciò per l'esperimento X. Ora siccome la dilatazione risulta eguale alla contrazione per l'uguaglianza de' prismi e delle loro inclinazioni, l'oggetto veduto in Q riesce della sua dimensione naturale.

Combinati con questo principio quattro prismi di vetro di Francia di 45° , ho potuto spostare l'immagine dell'oggetto più di 25° , e lo stesso ottenni con quattro prismi di Flintglass di $10^\circ 42'$. Nonostante questa gran deviazione l'immagine si è conservata così nitida, che a riserva della diminuzione della luce niuna differenza si è trovata tra l'oggetto diretto, e l'oggetto rifratto veduto anche col mezzo di un buon cannocchiale. Tanta correzione di colori, e tanta perfezione d'immagine non si ottiene combinando nella maniera comune prismi di Flintglass e Crownglass.

Il celebre Dottor Brewster nel suo eccellente trattato di nuovi istrumenti Fisici accenna (pag. 400) d'aver fatti alcuni tentativi per escludere i colori in un obbiettivo composto di due lenti della stessa sostanza, ma le sue prove non furono coronate di buon successo.

La costruzione dell'obbiettivo intrapresa da questo valente osservatore era appoggiata ad alcuni suoi esperimenti analoghi al mio IX° fatti con prismi di Flintglass, e di cristallo di rocca da' quali ottenne rifrazioni senza colori. Io dubito però fortemente che due sole lenti non bastino a formare un buon obbiettivo acromatico, e ciò per gli errori di sfericità che si introducono. Forse per questa ragione non avvi da sperar molto nemmeno coll'unirne quattro assieme, poiché un calcolo abbozzato su questo soggetto non mi ha somministrato sino ad ora vantaggiosi risultati. Ma di queste ricerche mi riservo di parlarne in altra occasione.

Per altro non mi dispenserò presentemente di far osservare, che quantunque la trovata variabilità della dispersione in uno stesso mezzo refringente possa da prima sembrare un fenomeno particolare

indipendente dalla legge conosciuta sulla produzione de' colori in un prisma, pure ella è una conseguenza immediata della teoria della rifrazione; e non per altro titolo è stata questa variazione da me chiamata nuova proprietà della luce, se non perché essa non fu avvertita prima da altri. Ma per vedere come colla scorta della teoria si possa rendere ragione de' risultati degli esperimenti che ho esposti, e specialmente come si scopra che a rifrazioni eguali in un prisma debbano nascere dispersioni disuguali, secondo che il raggio incidente piega verso la base, o verso il tagliante, basterà semplicemente calcolare queste dispersioni nelle due circostanze diverse; e a tal oggetto supponiamo che in un prisma ABC di vetro fig. 5. cada normalmente al piano AB un raggio di luce bianca DE. Questo nell'incontrar la faccia CB sotto l'angolo d'incidenza FED p. e. di 30° si rifrangerà uscendo nell'aria in ER ed EV, ove la ER segna la direzione de' raggi rossi meno rifrangibili, ed EV la direzione de' più rifrangibili ossia de' violetti. Quindi l'angolo VER sarà l'angolo di dispersione che bisogna determinare. Pertanto avendosi dal vetro nell'aria il rapporto de' seni d'incidenza e di rifrazione pei raggi rossi eguale $50 : 77$ e pei raggi violetti eguale $50 : 78$, risulterà

$$\begin{aligned} & \text{sen.}30^\circ : \text{sen.REH} :: 50 : 77 \\ & \text{e sen.}30^\circ : \text{sen.VEH} :: 50 : 78 \\ & \text{da cui si ha} \left\{ \begin{array}{l} \text{sen. R E H} = \frac{77 \cdot \text{sen.}30^\circ}{50} \\ \text{sen. V E H} = \frac{78 \cdot \text{sen.}30^\circ}{50} \end{array} \right. \end{aligned}$$

e per conseguenza $\text{REH} = 50^\circ 22'$. e $\text{VEH} = 51^\circ 16'$.

Dunque l'angolo di dispersione $\text{VER} = \text{VEH} - \text{REH}$ riescirà eguale a $54'$.

Supponiamo adesso nella stessa figura che un raggio RE di luce bianca cada sulla faccia CB del prisma col precedente angolo d'incidenza REH. Nel rifrangersi questo raggio egli si decomporrà in raggi rossi, che evidentemente prenderanno la direzione ED, ed in raggi violetti che si piegheranno in EL. Or questi giunti al piano AB coll'incidenza ELG usciranno formando l'angolo di rifrazione QLM, il quale rappresenterà ancora l'angolo di dispersione.

Frattanto essendo l'angolo $\text{REH} = 50^\circ 22'$ si avrà

$$\text{sen.}50^\circ 22' : \text{sen.FEL} :: 78 : 50.$$

onde $\text{sen.FEL} = \frac{50 \cdot \text{sen.}50^\circ 22'}{78}$ ed $\text{FEL} = 29^\circ 35'$.

Perciò $\text{LED} = \text{FED} - \text{FEL} = 30^\circ - 29^\circ 35' = 25'$.

Ma per essere MG parallela ad ED sarà l'angolo $\text{ELG} = \text{LED} = 25'$ dunque $\text{sen.}25' : \text{sen.QLM} :: 50 : 78$, donde si ricava $\text{sen.QLM} = \frac{78 \text{sen.}25'}{50}$ e $\text{QLM} = 39'$.

Ora dal paragone di quest'angolo QLM di dispersione coll'altro VER se ne ravvisa la grande differenza di $15'$, da cui riesce sensibile che attraverso un prisma, ed in pari rifrazioni, i colori debbano essere più forti quando il raggio incidente pieghi verso il tagliante, e meno forti quando il raggio incidente pieghi verso la base. Se il calcolo si fosse istituito sopra un prisma di Flintglass, la differenza delle dispersioni si sarebbe trovata ancora più considerabile. Volendosi però in un modo più generale riconoscere questa variazione di dispersione prodotta dalle diverse incidenze, basta considerare che chiamato Δ l'angolo sotto cui i raggi rosso, e violetto sono inclinati l'uno all'altro uscendo da un prisma di angolo A, e fatta $m : 1$ la ragione della rifrazione de' raggi di mezzana refrangibilità; $m + dm : 1$ il rapporto di rifrazione de' raggi violetti ed $m - dm : 1$ il rapporto di rifrazione de' raggi rossi, si avrà $\Delta = \frac{2dm \text{sen.}A}{\cos. r \cos. r'}$ ove r esprime l'angolo di rifrazione de' raggi medj nella prima superficie del prisma, ossia di quella verso l'oggetto ed r' l'angolo di rifrazione de' raggi medj nella seconda superficie.

La dimostrazione di quest'interessante teorema si può rinvenire nelle ricerche sopra diversi punti concernenti l'Analisi Infinitesimale del Pad. D. Gregorio Fontana Pavia 1793.

Ora se si chiama i l'angolo d'incidenza prima, che ha prodotto la rifrazione r si avrà

$$\begin{aligned} \text{sen.}i : \text{sen.}r &:: m : 1 \\ \text{e } \text{sen.}r &= \frac{\text{sen.}i}{m} \end{aligned}$$

ma $\text{cos.}r = \sqrt{(1 - \overline{\text{sen.}}^2 r)}$; dunque sostituendo si ha

$$\text{cos.}r = \sqrt{1 - \frac{\overline{\text{sen.}}^2 i}{m^2}} \text{ e poich\`e anche}$$

$$\text{cos.}r' = \sqrt{1 - \overline{\text{sen.}}^2 r'} \text{ ne verr\`a}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2dm \text{ sen.} A}{\sqrt{\left(1 - \frac{\overline{\text{sen.}}^2 i}{m^2}\right)} \sqrt{(1 - \overline{\text{sen.}}^2 r')}} = \\ &= \frac{2mdm \text{ sen.} A}{\sqrt{(m^2 - \overline{\text{sen.}}^2 i)(1 - \overline{\text{sen.}}^2 r')}} \end{aligned}$$

Frattanto la rifrazione totale attraverso un prisma non cambia se l'incidenza prima i si trasforma nella rifrazione seconda r' e viceversa; imperocch\`e, come \`e noto, la rifrazione totale ossia la deviazione uguaglia $i + r' - A$; ma col fare questa inversione nel caso in cui i non eguaglia r' , la dispersione Δ non rimane costante: essa varia come chiaramente si scopre dalla formola

$$\Delta = \frac{2mdm \text{ sen.} A}{\sqrt{(m^2 - \overline{\text{sen.}}^2 i)(1 - \overline{\text{sen.}}^2 r')}} : \text{ e poich\`e } m \text{ ed in conseguenza } m^2 \text{ supera l'unit\`a, il prodotto}$$

$(m^2 - \overline{\text{sen.}}^2 i)(1 - \overline{\text{sen.}}^2 r')$ sar\`a pi\`u grande allorch\`e i sar\`a maggiore di r' . Dalla qual circostanza il valore di Δ riescir\`a pi\`u piccolo del valore che acquisterebbe supponendosi $i < r'$. Laonde se si riflette, che l'ipotesi di $i > r'$ val quanto dire il raggio incidente sia piegato verso la base del prisma, e l'ipotesi di $i < r'$ val quanto dire il raggio incidente sia piegato verso il tagliante, si ravviser\`a da questa dimostrazione generale la verit\`a del principio che \`e stato stabilito intorno alla variabilit\`a della dispersione, allorch\`e la luce soffre pi\`u di una rifrazione.

Ma venendo a considerare l'andamento della luce rifratta per mezzo di due prismi, noi supporremo un raggio IS fig. 6. di luce bianca normale alla faccia DE, di un prisma DEF e condotta la PQ perpendicolare ad FE indicheremo con SR la direzione de' raggi rossi refratti, e con SV la direzione de' raggi violetti. Prendendo un secondo prisma BAC della stessa sostanza del precedente, e coll'angolo $A = E$ si disponga in modo che il raggio rosso SR incontri perpendicolarmente il piano AB: egli \`e chiaro che giunto esso raggio alla faccia AC coll'incidenza $SRY = \text{PSI}$ si rifranger\`a in RK parallelo alla direzione primiera IS, poich\`e tutto l'angolo ISR deve uguagliare l'alterno SRK. Non cos\`i succeder\`a dell'altro raggio violetto SV poich\`e incontrando obliquamente il piano AB, si piegher\`a in OV accostandosi alla perpendicolare MN; e quindi nell'uscire dall'altra faccia AC si rifranger\`a in VT allontanandosi dalla perpendicolare LZ. Resta ora a vedersi quale inclinazione abbia il raggio VT rispetto all'altro RK dopo d'aver subite le deviazioni indicate. Egli \`e dal paragone delle direzioni di questi raggi rossi, e violetti che si riconoscer\`a nel caso presente, in cui la rifrazione totale de' due prismi \`e zero, se rimanga o no dispersione di colori.

Per facilitare questo confronto sia l'angolo $\text{PSI} = \text{SRY} = i$; $m - dm : 1$ il rapporto del seno d'incidenza al seno di rifrazione de' raggi rossi; $m + dm : 1$ il rapporto medesimo pei raggi violetti, l'angolo $\text{QSR} = \text{XRK} = r$ e l'angolo $\text{QSV} = v$. Di qu\`i si avr\`a $\text{sen.}i : \text{sen.}r :: 1 : m - dm$, ossia

$$(I) \quad \text{sen.}r = (m - dm) \text{sen.}i.$$

Chiamato quindi Δ l'angolo MOS = OSR e Δ' l'angolo VON, si otterrà $\text{sen.}\Delta : \text{sen.}\Delta' :: m + dm : 1$ e per essere Δ un angolo piccolissimo sarà ancora $\Delta : \Delta' :: m + dm : 1$ da cui si ricava $\Delta' = \frac{\Delta}{m + dm}$.

Ora fatto $OVZ = i'$ ed $LVT = v'$ avremo $i' = i - \Delta' = i - \frac{\Delta}{m + dm}$ ed inoltre $\text{sen.}\left(i - \frac{\Delta}{m + dm}\right) :$

$\text{sen.}v' :: 1 : m + dm$. donde si ha

$$(II) \quad \text{sen. } v' = (m + dm) \text{sen.} \left(i - \frac{\Delta}{m + dm} \right).$$

Frattanto calcolando colle formole (I) (II) gli angoli r e v' ossia XRK ed LVT si trova sempre il primo maggior del secondo. Laonde i raggi violetti non uscendo paralleli ai rossi ma piuttosto ad essi inclinati, vi sarà dispersione senza che esista deviazione dell'immagine del punto luminoso veduto col mezzo di raggi rossi. E siccome il raggio violetto VT piega più verso il tagliente A del raggio rosso RK, la dispersione rimarrà in favore del prisma DEF rivolto verso l'oggetto, il che si accorda perfettamente coll'esperienza XIII.

Per darne un esempio sia l'angolo $i = 30^\circ$ ed i due prismi siano di Flintglass. Siccome per questo cristallo si ha $m = 1,580$. $dm = 0,015$, ne verrà $\text{sen.}r = 1,565 \text{sen.}30^\circ$, ed $r = 51^\circ 29'$. D'altronde avendosi $\text{sen.}i : \text{sen.}v :: 1 : m + dm$ ossia $\text{sen.}v = (m + dm) \text{sen.}i = 1,595 \text{sen.}30^\circ$, se ne dedurrà $v = 52^\circ 54'$ onde

$v - r = \Delta = 1^\circ 25'$, e però $\text{sen.}v' = 1,595 \text{sen.}\left(30^\circ - \frac{1^\circ 25'}{1,595}\right)$ che somministra $v' = 50^\circ 54'$.

L'angolo dunque di dispersione $r - v'$ dopo il passaggio attraverso i due prismi che non spostano l'oggetto sarà di $35'$.

Se il prisma ABC si immagini ruotare intorno il suo asse finché il piano AB riesca parallelo ad FE, è agevole il riconoscere che in tal situazione i raggi RS ed SV sortiranno dal piano AC paralleli fra loro ed al raggio IS. Quivi adunque sarà nulla la rifrazione totale e nulla la dispersione. Osservando poi che in questo caso il fascio di luce incidente sul piano AB del secondo prisma, piega verso la base di lui, e nel caso contemplato precedentemente il fascio medesimo piegava verso il tagliente, se ne può inferire l'accordo della teoria coll'osservazione nel provare, che la dispersione in un secondo prisma è più grande quando il raggio in esso incidente piega verso la base, di quello che lo sia quando il raggio incidente piega verso il tagliente. Ma per convincersi maggiormente di questa verità basta considerare, che trattandosi di un prisma solo si è in un modo generale dimostrato essere più grande la sua dispersione, allorquando il raggio incidente bianco piega verso il tagliente. Or questa posizione corrisponde sempre a quella del raggio emergente inclinato verso la base. Per il principio adunque di reciprocità se un raggio di luce decomposto in virtù della rifrazione di un prisma viene ad incontrare un secondo prisma al primo contrapposto, avrà esso raggio in senso contrario disperso, e lo sarà maggiormente se incontra la prima faccia del secondo prisma con inclinazione verso la base del medesimo, piuttosto che con obliquità verso il tagliente.

Egli è ora manifesto che la comune teoria de' colori poteva con singolar facilità dimostrare che per la rifrazione acromatica non si esige assolutamente più di una sostanza refringente. Ma sebbene questa teoria sia stata coltivata da tanti sommi Matematici ed Ottici dai tempi di Newton fino al presente, pure la proprietà che ho indicata rimaneva tuttora non solo ignota, ma si giudicava impossibile, se in alcuni esperimenti che io intrapresi per altro oggetto non mi si fosse scoperta.

Potrem dunque registrare anche questa tra quelle luminose prove che in fatto di fisica l'esperienza ben di sovente, e forse il più delle volte non si lascia precedere dalla teorica per disvelare le circostanze tutte che accompagnano un dato fenomeno.