

**Descrizione
di alcuni istrumenti
da misurare gli angoli per riflessione**

Memoria
Del Professor Gio. Battista Amici

Ricevuta adì 6. Maggio 1836.

«Memorie di Matematica e di Fisica della
Società Italiana delle Scienze residente in Modena»
Tomo XXI-1837
Parte contenente le Memorie di Fisica
(pp. 142-174)

Nel 1822 pubblicai la descrizione di un nuovo strumento da misurare gli angoli, particolarmente in Mare, che chiamai Settore di riflessione a prismi. Il Sestante d'Hadley ed il circolo di riflessione di Borda adoprati pel medesimo ufficio non misurando archi superiori a 120° , e tutto al più 130° , lasciavano ancora desiderio che con qualche ritrovamento ne fosse ampliata la scala fino a 180° onde servissero alla cognizione della depressione dell'orizzonte, all'osservazione posteriore quando la terra, o le nubi nascondono il confine del mare dalla parte dell'astro, alla determinazione della latitudine allorché la distanza del Sole al Zenit non arriva a 30° , e se ne guarda l'immagine riflessa da un orizzonte artificiale, ed in fine ad altre utili ricerche, nelle quali quei preziosi istrumenti non sono applicabili. I tentativi che erano stati fatti per ridurli ad uso più esteso, sia col variare la disposizione dei due specchi, sia coll'aggiungerne un terzo, o con altri diversi artifizi non avevano ottenuto alcun buon successo. L'idea che io concepì di sostituire dei prismi agli specchi ordinari, sembrò soddisfare le brame degli osservatori. Il mio Settore infatti in un modo semplicissimo è capace di misurare gli angoli da zero fino a 180 gradi, e più, al qual fine bastano due prismi isosceli rettangoli, uno mobile sull'alidada che porta il nonio, l'altro a canto ad esso, fisso sul piano del lembo diviso. Perciò gli oggetti si vedono ciascuno per la sola riflessione interna del rispettivo prisma, a differenza di quello che succede nel Sestante, ove uno degli oggetti si guarda direttamente, e l'altro per doppia riflessione degli specchi. Né il nuovo istrumento manca del pregio degli antichi, di mirare per diritto ad uno degli oggetti, sebbene i raggi arrivino all'occhio dopo essersi una sol volta riflessi; imperciocché le rifrazioni che succedono nel prisma entrando ed uscendo, possono deviare la luce in maniera che l'asse del cannocchiale, e l'oggetto si trovino in una medesima linea retta che passi pel piano riflettente, o ad esso sia parallela. Soltanto nel caso di prendere angoli prossimi, o eguali a 180° l'asse del cannocchiale non può incontrare alcuno degli oggetti che si vogliono osservare, ma stando inclinato ad ambidue rende meno agevole il trovarli. Tuttavia il mio lavoro fu accolto con molto favore dagli intelligenti, e parecchie domande mi furono fatte da illustri astronomi e navigatori per procurar loro istrumenti di questa specie. La mia descrizione venne copiata in diversi giornali scientifici, ed il celebre Brewster ne formò un articolo nella sua Enciclopedia ove ne parla con elogio. Divulgatosi in tal maniera il principio della mia costruzione, alcuni artisti in Inghilterra ed in Francia si accinsero ad imitarla. Io stesso mi proposi di riprodurre altri Settori e Circoli interi con prismi di maggiori dimensioni. Ma un ostacolo insormontabile si oppose alla speranza di vedere introdotto l'uso generale di questo istrumento.

L'estrema difficoltà di trovar del vetro limpido, e senza strie da poter fare i prismi, fu lo scoglio nel quale io urtai, e fu ancora una delle cagioni che rese infruttuosi i tentativi degli altri ottici.

Il Barone von Zach zelantissimo promotore della fabbricazione e miglioramento dei Settori prismatici, informato dell'impossibilità di trovare in altri paesi del vetro puro, ricorse a Monaco in Baviera a quelle officine che in tal genere godevano della maggiore riputazione. In data 3 febbrajo 1823 mi scriveva. "J'ai vu avec bien de la satisfaction que vous vous êtes occupé de sa confection, (d'un gran Settore di riflessione) mais que ce sont les prismes de verre qui vous arrêtent. J'avais écrit à M.^r Utzschneider pour les avoir, mais je n'ai jamais eu de réponse.

Dés que j'ai reçu votre lettre, j'ai écrit à M.^r Ertel, ce qu'à la vérité j'aurai dû faire plutôt, et je l'ai prié de m'envoyer au plus vite possible les deux prismes rectangulaires, dont le grand côté de 15 lignes du pied de Paris"... Con altra lettera 4 Marzo 1823 così si esprimeva. "Je me hâte de vous apprendre qu'enfin j'ai reçu réponse de Munich relativement aux prismes pour le Secteur de réflexion. Voici ce que M.^r Fraunhofer en dit. D'abord il a été très-surpris de leur grandeur extraordinaire, et dit que c'était un ouvrage très-difficile et très-pénible à faire, et à les construire parfaitement plans, que cela prendrait beaucoup de tems, et que le prix en seroit exorbitant... Ce qui me paraît singulier, c'est que M.^r Fraunhofer ne fait aucune mention de la difficulté à trouver de verre sans veines, filandres, stries ec; il parle seulement de la difficulté de travailler ces verres. Suffirait il peut-être de n'avoir que le verre pour travailler ensuite vous-même ces prismes? J'attends sur cela vos conseils, et vos renseignements avant de répondre à M.^r Fraunhofer".

Di niuna pena era per me il pulimento esatto dei prismi; la pratica che precedentemente io aveva fatto di questo lavoro, mi aveva insegnato abbastanza per condurlo a fine colla più rigorosa precisione. Null'altro mi occorreva che il vetro greggio, e M.^r Fraunhofer dopo non breve tempo me ne inviò tre pezzi accompagnandoli colle seguenti linee in data 16 Ottobre 1824. "M. le Baron de Zach à Gènes a commandé, il y a une année, trois prismes de Crown-glass homogènes sans poli. J'ai le plaisir de vous les envoyer ci-joint. Le prix est 21 florins. Ordinairement je ne fonds pas du verre pour le vendre sans le mettre en oeuvre; ce n'est que par égard de M. le Baron, et de vous, que j'en fais une exception, qui cependant doit être sans consequence, ayant refusé en plusieurs occasions la vente du verre".

Il vetro fuso dal celebre ottico bavarese era, come doveva aspettarsi, di una trasparenza ed omogeneità meravigliosa. Con questo io potei formarne dei prismi che comportavano un ingrandimento di sessanta volte con tanta distinzione da fare scoprire doppia la stella Castore la cui distanza è 5",2. Ma la risposta dell'ottico bavarese di non voler prestarsi a vendere un prezioso materiale che dalle sole sue mani poteva uscire, mi costrinse a sospendere i miei lavori, e ad abbandonare il pensiero di vedere, col mezzo anche dell'opera altrui, procurato alla scienza un esteso numero di utili istrumenti.

Le mie ricerche si rivolsero allora ad altro principio, quello cioè comune degli specchi, dalla varia disposizione dei quali mi lusingava ottenere qualche miglioramento. Trovai infatti che due soli specchi collocati nella maniera che dirò, sopra un cerchio intero, invece d'un settore, offrivano alcuni di quei vantaggi, dei quali io andava in traccia.

[...] Quantunque il circolo reiteratore sia per la prima volta in questo scritto sottoposto agli occhi del pubblico, esso però era costruito fino nel 1824. All'occasione che io feci nel 1827 un viaggio in Francia, ed in Inghilterra, i primi ottici, e meccanici di quei paesi lo esaminarono con altri istrumenti che io portava di mia invenzione. Troughton pochi giorni dopo d'averlo veduto mi mostrò due specchi rozamente uniti insieme ad angolo, dicendomi d'aver concepita molto tempo avanti di me quella disposizione da lui abbandonata perché gli parve imperfetta. Era infatti naturale il posporla a quella di Hadley, quando si lasciava sussistere l'inconveniente di mirare ove non esiste l'oggetto che si vuole osservare; inconveniente reso anche più grave dal tenere il cannocchiale ad angolo variabile sullo specchio fisso. Ma il pensiero di fare ruotare due specchi piani l'uno sopra l'altro onde misurare gli angoli, rimonta ad un'epoca ben più antica di Troughton. Parecchi scrittori

l'attribuiscono a Caleb Smith il quale propose su questo principio un Ottante che porta ancora il nome dell'inventore.

È poco noto, ed io pure l'ignorava, quando descrissi il mio Settore di riflessione, che questo medesimo Smith avesse indicato di far uso indifferentemente di specchi o di prismi pel suo Ottante. Con questo suggerimento per altro, egli non aveva in vista che di produrre tanto cogli uni che con gli altri, una riflessione analoga, e non iscopri la principale proprietà che hanno i prismi di riflettere la luce quando anche il piano di riflessione sia parallelo ai raggi incidenti, proprietà la più essenziale che credo essere io il primo che l'abbia notata, e riconosciuta utile per misurare con facilità gli angoli da zero fino a 180° . Per verità è molto curioso che un periodo di undici anni abbia fatto perderne la ricordanza ad alcune persone, e che certo Steinheil di Monaco abbia dato a costruire un cerchio a prismi di sua invenzione a quel medesimo Ertel, cui il Barone di Zach si era indirizzato per procurarmi il vetro da fare i prismi al mio Settore. La descrizione dei cerchi a prismi fabbricati a Monaco si trova inserita nei Numeri 243 e 247 dell'Astronomische Nachrichten stampato in Altona anno 1833, e chi vorrà darsi la pena di leggerla in confronto della mia lettera pubblicata nel 1822, vi ravviserà una straordinaria coincidenza d'idee espresse quasi con le medesime parole. Una differenza non pertanto distingue il mio dall'istrumento di Monaco, la quale consiste nell'aver messo in quest'ultimo i prismi uno sopra, ed uno sotto, mentre io indicai solo di collocarli uno a canto dell'altro. Vuolsi ora sapere il motivo che m'indusse a situare i prismi in quel modo? La ragione è del tutto semplice; essi presentano gli oggetti chiari il doppio di quello che si vedono nella riformata moderna disposizione. Infatti un prisma di vetro isoscele rettangolo, allorché i raggi incidenti sono per esempio paralleli o poco inclinati al piano di riflessione, manda all'obbiettivo cui sta davanti, una striscia di luce larga circa la quarta parte dell'ipotenusa. Se dunque due prismi stanno l'uno sopra l'altro, non valgono, per tramandare luce, di più d'un prisma solo: ma se i due prismi giacciono l'uno a canto dell'altro, le strisce luminose riflesse sono due che hanno ciascuna la medesima larghezza d'un quarto dell'ipotenusa.

Appena uscito dall'officina di Ertel il cerchio a prismi, il Sig. J. G. Horner con sua cortese lettera dei 20 febbrajo 1833 me ne diede contezza. Questo distinto Astronomo e Navigatore, prevenuto in favore del mio Settore, che undici anni prima egli aveva adoprato in Genova col Barone di Zach, volle offrirmi la sua mediazione per procurarmi del vetro limpido dalle grandi fabbriche del Monte Jura. Una esibizione tanto gentile non poteva che essere da me accolta con giubilo, e pochi mesi bastarono a mettermi in possesso di quattro grossi prismi di Crown-glass esenti da strie usciti dalla manifattura in Soleure della Vedova Guinand⁽¹⁰⁾, capace di fonderne ad ogni richiesta dei simili, e perfettissimi. Questa avventurosa circostanza richiamando la mia attenzione sopra il soggetto al quale per lo innanzi mi era applicato, ha contribuito a portarvi un considerabile miglioramento. Io presento quindi al pubblico un nuovo cerchio moltiplicatore a prismi, nel quale ho introdotto tutte quelle modificazioni che l'esperienza mi ha dimostrate utili. A me pare d'aver toccato lo scopo cui miravano gli astronomi viaggiatori, e se il giudizio degl'intelligenti mi confermerà in questa opinione, sarò molto contento di aver potuto rendere un servizio alla navigazione.

La fig.^a 5^a mostra lo strumento. AB è un cerchio d'ottone con lembo d'argento di sei pollici di diametro. Un alidada NM mobile intorno al cerchio colla vite tangente V contiene due nonii opposti. Essa porta nel centro il prisma di vetro P isoscele rettangolo fermatovi stabilmente con quattro viti, le quali servono ancora a rendere i tre spigoli paralleli all'asse di rotazione. Il cerchio colla sua alidada unita gira sopra un secondo asse concentrico mediante un'altra vite tangente U attaccata al telaio inferiore CDE. All'estremità del braccio C, che sporge in fuori è congiunta la base d'un secondo prisma Q, base sopra della quale appoggiano parimente due serie H, L di anelli che contengono i vetri colorati. Il prisma Q, col soccorso della vite R si pone coi suoi spigoli paralleli agli spigoli di P e serve a riflettere la luce, che riceve da questo, contro il cannocchiale S sostenuto dal braccio E. Con movimenti applicati al medesimo cannocchiale esso si alza, o si abbassa rispetto al piano del lembo, ed a questo si conduce parallelo.

Da ciò che ho descritto facile sarà adesso comprendere come agisca lo strumento. Primieramente debbo notare che la faccia riflettente del prisma Q giace inclinata all'asse del cannocchiale sotto un

angolo costante di 45° , e non occupa che la porzione inferiore dell'obbiettivo. Con la parte superiore dunque del medesimo cannocchiale si guarda direttamente l'oggetto lontano, e nel modo stesso che si opera cogli specchi dei noti circoli, o sestanti, si porta colla rotazione del prisma P l'immagine riflessa nel campo di vista, e si eseguisce la sovrapposizione, o il contatto delle immagini. Qualunque sia il grado segnato dai nonii, quando succede la coincidenza delle due immagini, diretta e riflessa, dello stesso oggetto, esso è il principio di numerazione, ossia il punto zero, e corrisponde al parallelismo della faccia dei prismi. Questo parallelismo è delineato nella figura 5^a dal quale passando ad altra posizione col girare l'alidada, la somma degli archi percorsi dai due nonii uguaglia l'angolo che un raggio riflesso farebbe con un raggio diretto che entri nell'occhio per la stessa linea, che vale quanto dire, uguaglia la distanza angolare dei due oggetti osservati.

Girata l'alidada 45° da N verso A, che è il senso in cui si succedono i numeri delle divisioni, la faccia opposta all'angolo retto del prisma P riesce parallela ai raggi incidenti che provengono da un oggetto situato a 90° dalla direzione del cannocchiale; e quantunque questa sia la posizione più sfavorevole rispetto alla quantità di luce che il prisma mobile riflette, pure di questa a sufficienza ne resta, mentre consiste in una striscia, o apertura di circa quattro linee di larghezza, ed alta quanto il prisma medesimo. Ma se si continuasse a muovere l'alidada per parecchi altri gradi, e per lo stesso verso, la striscia luminosa diminuirebbe successivamente di larghezza terminando col perdersi affatto. Potrebbe dunque sembrare che con questo prisma non fossero misurabili, che angoli fino a 90° o poco superiori. Ciò non pertanto esso serve senza alcuno ostacolo a prendere gli angoli fino a due retti colla stessa precisione, e chiarezza con cui si misurano gli angoli piccoli. Infatti basta considerare che giunto il nonio N ai 45° , se si gira l'alidada 180° il piano di riflessione rimane parallelo a se stesso, nel mentre che l'angolo retto del prisma prende una posizione diametralmente contraria rispetto al centro del circolo; perciò la riflessione seguita a farsi da 90° a 180° nel modo medesimo che si effettua da 90° a zero. E qui si noti che non occorre eseguire alcuna lettura di più né un'ulteriore rettificazione dello strumento perché l'alidada giri 180° , la sola differenza consiste nello scambiare denominazione ai nonii, volendo dalla somma dei loro archi percorsi avere l'angolo compreso tra 90° , e 180° .

Noi abbiamo supposto finora che l'alidada giri seguendo l'ordine della numerazione, nel qual caso si vedono per riflessione successivamente tutti quegli oggetti che occupano la semicirconferenza situata, per esempio, a destra dell'osservatore, ma l'alidada può muoversi ancora in senso retrogrado, quali dunque sono gli angoli che per questo movimento possono dall'altra parte determinarsi? Chi conosce l'ottica, comprende subito che soli 6° circa di rotazione (secondo la qualità del vetro) si potrebbero effettuare, dopo dei quali cessa la riflessione totale interna del prisma, e si converte in rifrazione; ma il provvedimento che ho immaginato di stagnare la grande faccia del prisma, esclude il detto limite, e i raggi provenienti da un qualunque oggetto posto a sinistra dell'osservatore subiscono la necessaria riflessione, finché l'incidenza resta intercetta dal prisma fisso; la qual cosa succede soltanto al grado ottantesimo. Da ciò ne segue che per questi ottanta gradi il mio circolo gode della proprietà di misurare gli angoli al di qua ed al di là del punto zero, e si rende suscettibile della moltiplicazione nella maniera stessa che si usa coi circoli di Borda, cioè collimando alternativamente ai due oggetti senza cambiare la posizione del piano dello strumento, oppure collimando sempre al medesimo oggetto, e rovesciando il circolo ad ogni osservazione. Per verità questa operazione nel circolo di Borda si estende a più di 120° , ma restano da questi esclusi venti o trenta gradi in causa dell'ombra del piccolo specchio e dei vetri oscuri. Nel mio tutta la scala degli 80° rimane libera. D'altronde un'altra maniera di ripetizione è praticabile nel circolo che descrivo, e vale per tutta l'estensione dei 180 gradi. Essa si compie conservando lo strumento sempre rivolto dalla stessa parte col cannocchiale diretto ad uno degli oggetti, e per ogni ripetizione partendo dal parallelismo delle facce riflettenti dei prismi, il quale si riconosce dalla sovrapposizione delle due immagini dell'oggetto a cui si collima. Così il cannocchiale S essendo puntato ad un oggetto X (fig. 5) le cui immagini, diretta, e riflessa si sovrappongono, si gira l'alidada N verso A per portare al contatto dell'immagine di X quella di un altro oggetto Z, e si ha

l'arco semplice XZ. Quindi colla vite U facendo retrocedere il circolo finché le due immagini di X ritornino a sovrapporsi, si ripete col moto dell'alidada N la precedente misura e si ha l'angolo doppio, e nella medesima maniera proseguendo si triplica, quadruplica ecc. ecc. Finché l'angolo che si ripete non supera 90° non è necessario alcuna avvertenza particolare onde evitare la confusione nella lettura delle divisioni: ma quando l'angolo è maggiore, per cui l'alidada deve come si disse girare 180° , bisogna ritenere che ad ogni osservazione dispari i nonii cambiano denominazione e conservano la propria nelle osservazioni pari. Per esempio se il nonio N parte da zero gradi, e l'angolo da misurarsi sia 170° , nella prima osservazione sarà il nonio M 85° distante dallo zero, e nella seconda osservazione sarà il nonio N, che indicherà l'angolo 170° .

[...] Il cannocchiale del mio circolo è costruito sul principio medesimo dei nuovi microscopi acromatici, cioè l'obbiettivo si compone di due obbiettivi a due vetri per ciascuno posti uno dopo l'altro. In questa maniera comporta un'apertura di dieci linee con soli quattro pollici di distanza focale, ed ingrandisce con oculari acromatici cinque e quindici volte. Sebbene quattro siano le lenti che formano l'obbiettivo pure per essere incollate con mastice a due a due, e per la bianchezza del Crown-glass, assorbono in proporzione minore quantità di luce, che gli obbiettivi tripli inglesi non incollati ed eseguiti con Crown-glass verde. Io adopro ancora obbiettivi a due vetri soli, della medesima apertura di 10 linee, e con sette pollici di distanza focale. L'ingrandimento di cinque volte in un'apertura dieci linee producendo la *chiarezza massima*, poiché il pennello luminoso emergente eguaglia la maggior larghezza della pupilla, io penso che debba giovare a prendere in mare l'altezza delle stelle col non rendere troppo languida l'immagine dell'astro o dell'orizzonte.

[...] Le divisioni del mio circolo sono di 20 in 20 minuti secondi, ciascun grado avendo tre parti, ed il nonio sessanta. Io sono sicuro che niuno dei segni del lembo è errato $5''$, e per conseguenza una suddivisione maggiore sarebbe opera facile, ma alcune considerazioni mi hanno determinato a preferire quella che ho eseguita.

[...] La leggerezza d'un istrumento che si debba adoprare a mano contribuisce assai a facilitare l'osservazione, specialmente quando la necessità ci costringe di rimanere in posizione incomoda, ma questa leggerezza contrasta con un ostacolo che non è ovvio superare entro certi limiti. Gli artisti inglesi con un ben architettato compartimento di lamine sottili puntellate, sono giunti nei loro istrumenti di marina ad accoppiare il più piccolo peso possibile con una solidità sufficiente. Il Sestante di Troughton che possiede l'I. R. Museo, è un modello di perfezione in questo genere. Esso ha sette pollici e mezzo di raggio e pesa Kilogrammi 1, 36. Io credevo in principio che il telajo CDE (fig.^a 5.^a) del mio circolo, essendo d'un solo pezzo d'ottone colle braccia larghe sei linee, e grosse due linee ed $\frac{1}{3}$, potesse ben resistere al piccolo peso delle parti che deve sostenere. Con mia sorpresa però mi accorsi, che nel capovolgere il circolo sensibilmente si piegava, turbandosi alcun poco il parallelismo dei prismi. Un accrescimento di grossezza non mi giovò ad escludere affatto la flessione, la quale sono riuscito soltanto a togliere perfettamente coll'applicazione del manico, come viene rappresentato nella fig. 9.^a In questa maniera l'istrumento rimane robusto, e comodo, pesando tutto completo per l'osservazione Kilogramma 1, 43.

Nell'*Astronomische Nachrichten* che ho sopra citato si trova sentenziato *essere impossibile di costruire prismi con due angoli uguali*. Tale osservazione ha indotto un grande astronomo della Germania a produrre la teoria dei così detti circoli prismatici di Steinheil, della quale solamente la prima parte N. 254 mi è pervenuta. Il lettore ricorderà pure che nella lettera di Fraunhofer a Zach si parla del penosissimo e difficilissimo lavoro dei prismi, che gli porterebbe ad un prezzo esorbitante. Ora quella impossibilità, o almeno estrema difficoltà, che è proclamata, sarebbe mai un nuovo scoglio da impedire l'introduzione estesa d'un buon strumento? Io credo che ciò non avverrà. Ed a rimuovere ogni opposizione, pubblico qui il mio metodo di sottoporre all'esame i prismi per riconoscerne la bontà, quale privatamente io l'avevo già partecipato al Barone di Zach, e ad altri

amici miei, metodo di cui la sola notizia basterà per dirigere un artista a condurre l'opera sua fino alla più scrupolosa perfezione.

Il principio sopra del quale si appoggia l'esperimento, consiste nella proprietà che ha un prisma di vetro prossimamente isoscele di riflettere la luce, quando anche il raggio incidente emana da un oggetto collocato dalla parte contraria della superficie riflettente. Da questa proprietà ne consegue che un oggetto può essere veduto contemporaneamente per la riflessione esterna della faccia adiacente ai due angoli eguali, e per la riflessione interna della medesima faccia. In questo modo mirando, per esempio, il Sole, se i due dischi che derivano dalle due opposte riflessioni esattamente si sovrappongono, si ha un criterio sicuro dell'uguaglianza perfetta dei due angoli del prisma; che se (supposto l'asse del prisma orizzontale, e la faccia riflettente rivolta in alto) l'immagine del Sole riflessa internamente giace sotto l'immagine che proviene dalla riflessione esterna, in allora l'angolo più prossimo all'osservatore sarà minore dell'angolo più lontano: viceversa accadendo che l'immagine rifratto-riflessa stia al di sopra della semplicemente riflessa, ciò offre l'indizio che il minor angolo è il più remoto. Infatti sia ABC fig.^a 10^a un prisma avente gli angoli alla base c , $c + x$. Il raggio che cade sulla faccia CB abbia l'incidenza I e sia r l'angolo corrispondente di rifrazione. Si chiami z l'angolo di riflessione interna. La nuova incidenza sia i , ed R l'angolo di emergenza. Se $m : n$ rappresenta il rapporto dei seni d'incidenza, e di rifrazione dall'aria nel vetro si avrà

$$\text{sen.}r = \frac{n \text{sen.}I}{m},$$

$$z = 90^\circ - \text{Arc. sen.} \frac{n \text{sen.}I}{m} - c,$$

$$i = \text{Arc. sen.} \frac{n \text{sen.}I}{m} - x, \text{ e però}$$

$$\text{sen.}R = \text{sen.}I \cos.x - \text{sen.}x \sqrt{\frac{m^2}{n^2} - \text{sen.}^2 I}$$

Questa formula serve a calcolare l'inclinazione che il raggio incidente fa col raggio emergente, onde confrontarla con l'inclinazione che avrebbe il raggio riflesso col raggio diretto, quando invece del prisma, facendo $m = n$, si considerasse la sua base AB, come un semplice specchio piano. Dal quale confronto risulterebbero manifestamente le correzioni da farsi agli angoli osservati nello strumento usando un prisma mobile non isoscele. Ma senza entrare in tali applicazioni della formula si vede subito, che se l'angolo I è maggiore dell'angolo c , per esempio della quantità u , un raggio PS parallelo a quello incidente sopra CB, che provenga dal medesimo punto di un oggetto lontano, può incontrare la faccia AB e riflettersi esternamente sotto l'angolo u . Ora se il prisma fosse perfettamente isoscele, l'angolo I uguagliando l'angolo R , il raggio uscito dall'interno del prisma si troverebbe parallelo a QS, e perciò le immagini dello stesso punto vedute per riflessione, contemporanea interna, ed esterna, coinciderebbero esattamente. Ma nella circostanza che gli angoli alla base del prisma siano disuguali, quello verso l'occhio superando l'altro di x , il raggio riflesso QS, ed il raggio che esce dal prisma concorreranno dalla parte dell'oggetto; imperocché la formula mostra che $I - R$ è sempre maggiore di x . In questo caso dunque l'oggetto veduto per riflessione esterna comparirà più basso dell'oggetto stesso veduto per riflessione interna, ed il contrario accadrà quando l'angolo verso l'occhio sia il minore.

Nessun goniometro, nessun teodolite può somministrare la misura degli angoli di un prisma con tanta esattezza, quanto si ha dall'osservazione che ho suggerita. I prismi eseguiti nel mio laboratorio resistono a questa severissima prova che ci dispensa dal tener conto di correzioni quando sono montati sul circolo. Inoltre l'esperimento precedente è atto a fare scoprire ancora se in vece di un prisma il vetro ha piuttosto la forma piramidale, mentre in tal caso le due diverse immagini appariranno l'una a canto dell'altra, e la riflessa internamente sarà dal lato stesso ove si troverà il vertice della piramide. I prismi poi perfettamente lavorati sono soltanto necessari sull'alidada; gli altri immobili poco importa se abbiano, o no i due angoli alquanto diversi, purché la differenza non

sia tale da apportare indistinzione. Essi, cioè gl'immobili possono essere anche suppliti da specchi piani paralleli, che producono il medesimo effetto. [...]